数理解析研究所講究録
905 巻 1995 年 30-40

Landau level broadening by small periodic perturbation

京大理 岩塚 明 (Akira IWATSUKA)

§1. Introduction

2次元平面内で定数磁場をもつシュレディンガー作用素を考える．すなわち $B_0 > 0$ を定数とし，

$$(1) \qquad H = \left(D_1 + \frac{B_0}{2}x_2\right)^2 + \left(D_2 - \frac{B_0}{2}x_1\right)^2 + V(x),$$

を $L^2(\mathbb{R}^2)$ 内の自己共役作用素として実現したものを考える．ここで V は電場のポテンシャルで $\mathbb{R}^2$ 上の実数値関数，$D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j=1,2)$ とする．V が周期的な場合の H のスペクトルについて調べたい．簡単のため $T_1, T_2 > 0$ とし

$$(2) \qquad V(x_1+T_1, x_2) = V(x_1, x_2+T_2) = V(x_1, x_2) \quad \forall(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$$

という周期性をもつものとする．

磁場がない場合の周期的ポテンシャルをもつシュレディンガー作用素はよく知られているように Bloch 理論を用いてスペクトルは絶対連続となることがいえる ([T])．ところが $B_0 \neq 0$ の場合には事情が複雑になってくる．それは通常の平行移動：$u(x_1, x_2) \to u(x_1+T_1, x_2)$ と H が交換可能でないこ

とによる．その替わりに magnetic translation として知られる次の作用素 S_1, S_2 が H と交換可能となる：

$$S_1 u(x_1, x_2) := e^{-\frac{i}{2}B_0 T_1 x_2} u(x_1 + T_1, x_2)$$

$$S_2 u(x_1, x_2) := e^{\frac{i}{2}B_0 T_2 x_1} u(x_1, x_2 + T_2).$$

（[21], [22] を見よ．） ところが S_1, S_2 の間には交換関係

$$S_1 S_2 = e^{iB_0 T_1 T_2} S_2 S_1$$

が成り立ち， S_1 と S_2 が交換可能であるのは．

$$(3) \qquad \frac{B_0 T_1 T_2}{2\pi} =: N \in \mathbb{Z}$$

となるときである． N が有理数のときには周期を何倍かして考えればよいので，結局 N が有理数か無理数であるかで H のスペクトルの様子は大きく異なることとなる． N が無理数の場合には H のスペクトルは [H-S] によって調べられているがここでは (3) を仮定し，従って Bloch 波を用いた解析ができる場合について調べたい。

§2. Magnetic Bloch Theory

上の S_j を用いて Bloch 波の関数の空間を次の様に

$$\mathcal{E}(p_1, p_2) := \{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \mid S_j u = e^{ip_jT_j} u \ (j=1,2) \}$$

とおく。但し，$p=(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ は quasi momenta と呼ばれるパラメーターで，明らかに，

$$\mathcal{E}(p_1 + \tfrac{2\pi}{T_1}, p_2) = \mathcal{E}(p_1, p_2 + \tfrac{2\pi}{T_2}) = \mathcal{E}(p_1, p_2)$$

という周期性をもつので，$p \in \Omega^* := [0, \frac{2\pi}{T_1}) \times [0, \frac{2\pi}{T_2})$ に制限して考えれば充分である．これを用いて

$$\begin{aligned}\mathcal{E} := \{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^2_x \times \mathbb{R}^2_p) \mid & \ u(x,p) \in \mathcal{E}(p), \\ & u(x, p_1 + \tfrac{2\pi}{T_1}, p_2) = u(x, p_1, p_2 + \tfrac{2\pi}{T_2}) = u(x,p) \}\end{aligned}$$

とおくと，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ と $\mathcal{E}$ の間にユニタリー変換が存在する：

$$U : \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \ni f \longmapsto u \in \mathcal{E}, \quad \rho = (\mathrm{vol}\,\Omega^*)^{1/2}$$

$$(Uf)(x,p) := \frac{1}{\rho} \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} e^{-i(l_1 p_1 T_1 + l_2 p_2 T_2)} S_1^{l_1} S_2^{l_2} f(x),$$

とおけば U は全単射であり，

$$\begin{aligned}(U^{-1}u)(x) &= \rho^{-1} \int_{\Omega^*} u(x,p)\,dx, \\ \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \|u\|_{\mathcal{E}} := \Big\{ \int_{\Omega \times \Omega^*} dx \int dp\, |u(x,p)|^2 \Big\}^{1/2}.\end{aligned}$$

ここで $\Omega = [0, T_1) \times [0, T_2)$ は V の周期のなす lattice $\Gamma :=$

$(T_1\mathbb{Z})\times(T_2\mathbb{Z})$ の基本領域である $(\Omega \cong \mathbb{R}^2/\Gamma)$. この U を用いて: $\tilde{H} := UHU^*$ とおけば

$$\tilde{H} = \int_{\Omega^*}^{\oplus} \tilde{H}(p)\,dp$$

と direct integral decomposition できる. すなわち

$$(\tilde{H}u)(x,p) = (\tilde{H}(p)u(\cdot,p))(x)$$

$$\tilde{H}(p) = (D_1 + \tfrac{B_0}{2}x_2)^2 + (D_2 - \tfrac{B_0}{2}x_1)^2 + V \quad \text{on } \mathcal{E}(p)$$

となる. $\tilde{H}(p)$ は p に依らず共通の形の微分作用素で Ω 上の定義されるが, p 毎に異なる境界条件を付けて考えた作用素である. 正確には $H|_{\mathcal{E}(p)}$ の $L^2(\Omega)$ での作用素の閉包を $\tilde{H}(p)$ とおくと $L^2(\Omega)$ 上の自己共役作用素となり,

$$\mathrm{Dom}(\tilde{H}(p)) = \gamma_\Omega(\ \mathcal{E}(p) \text{ の } H^2_{loc}(\mathbb{R}^2) \text{ での閉包})$$

となる (γ_Ω は $\mathbb{R}^2$ の関数の Ω への制限). すると $\tilde{H}(p)$ は加藤の意味で解析族となり, また離散スペクトルをもつ. $\{\lambda_j(p)\}_{j=1}^{\infty}$ を $\tilde{H}(p)$ の固有値, $\lambda_1(p) \le \lambda_2(p) \le \cdots$ とすると H は $\lambda_j(p)$ $(p\in\Omega^*)$ に依る掛算作用素とユニタリー同値であり, $\lambda_j(p)$ がすべての j について p の非定数関数であれば, H は絶対連続であることがわかる.

§3. Landau Level Broadening

§2 の $\tilde{H}(p)$ は定義域が p につれて変わるため取扱い難いため，次のユニタリー変換 $W(p)$ を用いて同一の定義域をもつ作用素の族 $\hat{H}(p)$ を考える：

$$W(p)u(x) = e^{\frac{i}{2}(p_1x_1+p_2x_2)}u\left(x_1-\frac{p_2}{B_0}, x_2+\frac{p_1}{B_0}\right)$$

とおくと $W(p)$ は $L^2(\Omega)$ のユニタリー作用素であり $W(p)\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}(p)$.

$$\begin{aligned}\hat{H}(p) &:= W(p)^*\tilde{H}(p)W(p)\\ &= \hat{H}_0 + V(p)\end{aligned}$$

$V(p) := V\left(x_1+\frac{p_2}{B_0}, x_2-\frac{p_1}{B_0}\right)$ による掛算作用素

$$\hat{H}_0 = \left(D_1+\frac{B_0}{2}x_2\right)^2 + \left(D_2-\frac{B_0}{2}x_1\right)^2$$

$\mathrm{Dom}(\hat{H}_0) = \gamma_\Omega$ ($\mathcal{E}(0)$ の $H^2_{loc}(R^2)$ における閉包)

となる．したがって $\hat{H}(p)$ の固有値 $\{\lambda_j(p)\}$ について調べることになる。以下 V が小さいと見た場合，$\hat{H}_0$ からの摂動として計算を行う．まず $\hat{H}_0$ のスペクトルは

$$\sigma(\hat{H}_0) = \{(2j-1)B_0 \mid j\in\mathbb{Z},\ j>0\}$$

となり，全平面で考えたときの定数磁場をもつシュレディンガー作用素のスペクトルと一致し，Landau level と呼ばれる．但し全平面の場合には各 Landau level の多重度は∞

であるが $\hat{H}_0$ の場合には多重度は N である．実際 $\hat{H}_0$ の固有関数は具体的に計算できるのである．それには

$$A = i(D_1 + \frac{B_0}{2}x_2) - (D_2 - \frac{B_0}{2}x_1) \qquad \text{on } \mathcal{E}(0)$$
$$A^+ = -i(D_1 + \frac{B_0}{2}x_2) - (D_2 - \frac{B_0}{2}x_1) \qquad \text{on } \mathcal{E}(0)$$

とおくと交換関係

$$A^+A = \hat{H}_0 - B_0, \qquad AA^+ = \hat{H}_0 + B_0$$

を満たし，調和振動子の場合の生成・消滅演算子となるのである．

$$A = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{B_0}{2}(x_2 i + x_1) = 2e^{-\frac{B_0}{4}z\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\, e^{\frac{B_0}{4}z\bar{z}}$$

$(z = x_1 + ix_2)$

であることから，$\mathrm{Ker}(\hat{H}_0 - B_0) = \mathrm{Ker}\, A$ はテータ関数を用いて表せる：

$$\psi_0^{(r)} = c \; e^{-\frac{B_0}{2}x_2^2 + \frac{B_0}{2}x_1x_2 i}\, \zeta_r\left(\frac{z}{T_1}\right)$$

$$r = 0, \cdots, N-1, \quad c = \frac{(2N)^{1/4}}{T_1 \tau^{1/4}}, \quad \tau = T_2/T_1$$

$$\zeta_r(s) = \sum_{k \equiv r (\mathrm{mod}\, N)} e^{-\frac{k^2}{N}\pi\tau}\, e^{2\pi i s k}$$

とおくと $\{\psi_0^{(r)}\}_{r=0,\cdots,N-1}$ は $\mathrm{Ker}(\hat{H}_0 - B_0)$ の正規直交基底となり

$$\psi_k^{(r)} = \frac{A^{+k}\psi_0^{(r)}}{\sqrt{(2B_0)^k k!}} \qquad r = 0, \cdots, N-1$$

とすれば，$\{\psi_k^{(r)}\}_{r=0,\cdots,N-1}$ が $\mathrm{Ker}(\hat{H}_0-(2k+1)B_0)$ の正規直交基底となる．

$0<r<B_0$ として固定し，r は充分小さいものとする．$\Gamma_k=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-(2k+1)B_0|=r\}$ とする $(k=0,1,2,\cdots)$．摂動論により $\hat{H}(p)=\hat{H}_0+V(p)$ の固有値は，$\|V(p)\|=\|V\|_\infty\leq r$ のとき Γ_k 内に多重度を込めて N 個ある．$I_k=((2k+1)B_0-r,(2k+1)B_0+r)\subset\mathbb{R}$ とおくと

$$P_k(p)=E_{I_k}(\hat{H}(p))=\frac{-1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_k}(\hat{H}(p)-z)^{-1}dz$$

が $\hat{H}(p)$ の I_k への spectral projection を与える．Q_k を $\mathrm{Ker}(\hat{H}_0-(2k+1)B_0)$ への直交射影とすれば $\|V\|_\infty$ 十分小のとき

$$\|P_k(p)-Q_k\|<1$$

となるので $\dim \mathrm{Ran}\, P_k(p)=\dim \mathrm{Ran}\, Q_k=N$ であり，

$$D_k(p)=\{1-(P_k(p)-Q_k)^2\}^{-1/2}\{P_k(p)Q_k+(1-P_k(p))(1-Q_k)\}$$

とおけば $D_k(p)$ は $L^2(\Omega)$ のユニタリー作用素であり $P_k(p)$ と Q_k を intertwine する：

$$P_k(p)D_k(p)=D_k(p)Q_k.$$

よって $\hat{H}(p)$ の I_k 内におけるスペクトルは次の行列の固有値で与えられる；

$$\Lambda_k(p) = \left(\Lambda_k^{(rs)}(p)\right)_{\substack{r=0,\dots,N-1 \\ s=0,\dots,N-1}},$$

$$\Lambda_k^{(rs)}(p) = \left(\hat{H}(p) D_k(p)\psi_k^{(r)},\ D_k(p)\psi_k^{(s)}\right).$$

Λ_k は p について $(2\pi/T_1)\mathbb{Z} \times (2\pi/T_2)\mathbb{Z}$-periodic ではないが次の様な周期条件を満たす。

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & e^{-\frac{2\pi}{N}i} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{-\frac{2\pi}{N}(N-1)i} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{cases} \Lambda\left(p_1 + \frac{2\pi}{T_1}, p_2\right) = C_1 \Lambda(p) C_1^{-1} \\ \Lambda\left(p_1, p_2 + \frac{2\pi}{T_2}\right) = C_2 \Lambda(p) C_2^{-1}. \end{cases}$$

この周期条件は Fourier 級数展開が

$$(4) \qquad \Lambda(p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} a_n e^{i\frac{1}{N}(n_2 T_1 p_1 - n_1 T_2 p_2)} e^{n_1 n_2 \frac{\pi}{N} i} C_1^{n_1} C_2^{n_2}$$

となることと同値である。一方 $P_k(p)$ を V について展開すると

$$\Lambda_k^{(rs)}(p) = \lambda_k \delta_{rs} + \left(V(p)\psi_k^{(r)}, \psi_k^{(s)}\right) + O(\|V\|_\infty^2)$$

そこでVのFourier級数展開を

$$V(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} v_n \, e^{2\pi i\left(\frac{n_1}{T_1}x_1 + \frac{n_2}{T_2}x_2\right)}$$

とすると

$$\begin{cases} V(p) = \displaystyle\sum_n v_n \, e^{i\frac{n_1 T_2 p_2 - n_2 T_1 p_1}{N}} U_n \\ U_n := e^{2\pi i\left(\frac{n_1}{T_1}x_1 + \frac{n_2}{T_2}x_2\right)} \text{を掛ける掛け算作用素}, \end{cases}$$

となり

$$\left(\left(U_n \psi_k^{(r)}, \psi_k^{(s)}\right)\right)_{r,s} = \Phi_k(|\beta_n|^2)\, e^{\frac{n_1 n_2}{N}\pi i} C_1^{n_1} C_2^{n_2}$$

となる。但し Φ_k は k 次の Laguerre 関数であり、

$$\Phi_k(t) = e^{-\frac{1}{2}t} L_k(t) \quad \left(L_k(t) = \frac{1}{k!} e^t \frac{d^k}{dt^k}(e^{-t} t^k)\right)$$

$$|\beta_n|^2 = \frac{\pi}{N}\left(\tau n_1^2 + \frac{1}{\tau} n_2^2\right).$$

これは交換関係

$$A^\dagger U_n = U_n A^\dagger + \bar{\alpha}_n U_n$$

$$\alpha_n = (2\pi i)\left(\frac{n_1}{T_1} + i\frac{n_2}{T_2}\right)$$

から得られる。従ってVのFourier係数とΛ_kのFourier係数$\{a_n\}$（(4)に表われる）の間には

$$a_n = v_n \Phi_k(|\beta_n|^2)$$

の関係がある．このことから V が generic の時に Λ_k の固有値は非定数であることが推定される．実際 $N=1$ という制限的な場合ではあるが次の定理を得ることができる．

定理．$B_0 T_1 T_2 = 2\pi$, $\|V\|_\infty < B_0/2$ とする．次のいずれかが成立するものとする．

(i) V：非定数 かつ

$$(*) \quad \Phi_k(|\beta_n|^2) \neq 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \cdots \quad \forall n \in \mathbb{Z}^2,$$

(ii) V の Fourier 係数が無限個 $\neq 0$．

このとき $\exists \Sigma_V$：可算集合 $\subset [-1, 1]$ such that

$$H_\varepsilon = \left(D_1 + \frac{B_0}{2}x_2\right)^2 + \left(D_2 - \frac{B_0}{2}x_1\right)^2 + \varepsilon V$$

が $\varepsilon \in [-1, 1] \setminus \Sigma_V$ に対して絶対連続である．

$\Phi_k(|\beta_n|^2)$ の形から条件 $(*)$ は $\tau = T_2/T_1$ が有理数のときには成り立つことがわかる．

References

[T] L. E. Thomas, Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal, Comm.

Math. Phys. 33 (1973), 335-343.

[Z1] J. Zak, Magnetic translation groups I. II., Phys. Rev. 134-A (1966), 1602-1611

[Z 2] J. Zak, Group theoretical consideration of Landau level broadening in crystals, Phys. Rev. 136-A (1964), 776-780.

[H-S] B. Helffer and J. Sjöstrand, Analyse semi-classique pour l'équation de Harper, I-III, Supplément au Bull. Soc. Math. Fr. 116-118 (1988-1990).